

LES THÉORIES LOGICO-MATHÉMATIQUES QUEL EST LEUR INTÉRÊT DANS L'ACCOMPAGNEMENT DES APPRENTISSAGES?

FNAME
SEPTEMBRE 2018

Laurence Richez Orthophoniste,
Formatrice en formation continue
Master Recherche en Psychologie Cognitive

Avant propos

Limites de cette présentation

1h 15 + questions

- Un résumé très réducteur mais qui va s'attacher à vous donner ce sur quoi vous pouvez vous appuyer pour accompagner les apprentissages
- La théorie/les théories au service de la pratique

Plan

- 1) La théorie piagétienne/logico-mathématique
- 2) Les théories néo-piagésiennes et cognitivistes
- 3) L'exemple de l'acquisition du nombre
 - 1) Dans les modèles actuels de la neuropsychologie
 - 2) Ce que rajoute les théories logico-mathématiques
- 4) Ouverture vers les programmes scolaires

Theorie logico-mathématique (Jean PIAGET 1896- 1980) mots clefs

- ▣ Rôle majeur de l'adaptation au milieu
Assimilation et Accommodation → Equilibration
 - ▣ Constructivisme : des stades qui se succèdent toujours dans le même ordre
 - ▣ Structuralisme
 - ▣ Approche qualitative du développement
- Et encore : l'observation simple ou provoquée et la méthode clinique

Dans la perspective piagétienne, la connaissance n'est pas un état mais un processus adaptatif en continuel devenir.

Ce processus prend la forme d'une constante interaction entre le sujet et l'objet, se manifestant par l'alternance des processus d'assimilation et d'accommodation...

L'adaptation du sujet à l'objet repose sur l'équilibre de l'assimilation et de l'accommodation.

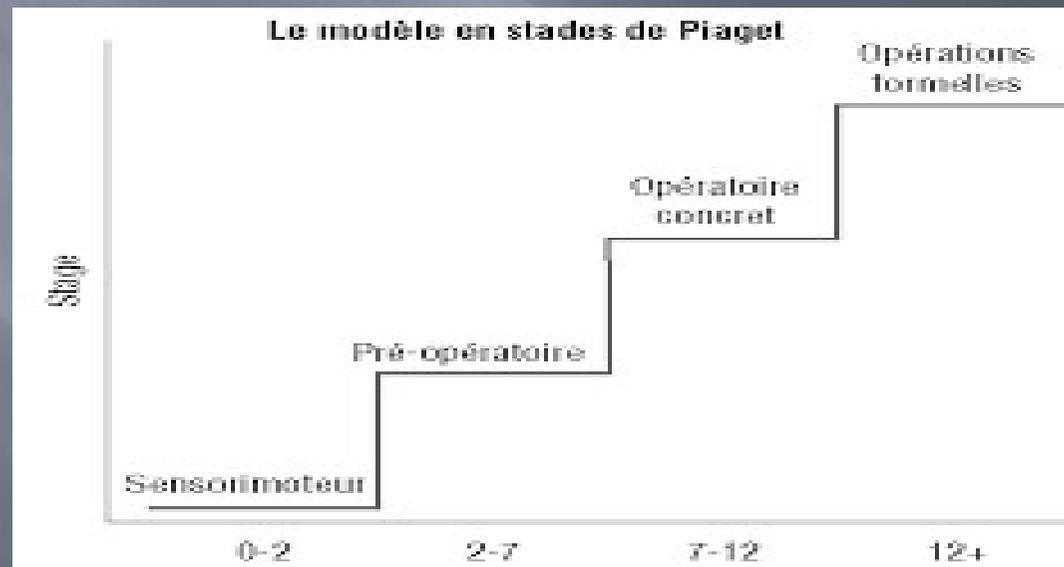
Il y a déséquilibre lorsqu'il y a prédominance indue de l'une sur l'autre. Ces déséquilibres vont engendrer... des réorganisations plus ou moins importantes des schèmes ou structures antérieurement construits.

Le développement des connaissances consiste donc en une adaptation croissante du sujet aux objets, s'effectuant par ...(le) passage d'un niveau d'équilibre à un autre qui lui est supérieur.

Fondation Jean Piaget, Piaget et l'épistémologie par M.-F. Legendre

Le modèle Piagétien

- Des stades qui se succèdent toujours dans le même ordre



les stades piagétiens

- ▣ Le stade sensori-moteur (0 à 2 ans environ)
 - Sens et mouvement
 - Schèmes d'actions
- ▣ Le stade préopérateur
 - la fonction symbolique mais dans l'espace et le temps présent
- ▣ Le stade opératoire
 - Les conservations
 - Les opérations concrètes
- ▣ - Le stade formel
 - Le réel n'est plus qu'un parmi tous les possibles

Le stade sensori-moteur

Le réel se construit grâce à

- La permanence de l'objet (8 mois)
- L'organisation spatio-temporelle : des réactions circulaires primaires à l'intériorisation des schèmes d'action
- La causalité

Mais sans la fonction symbolique

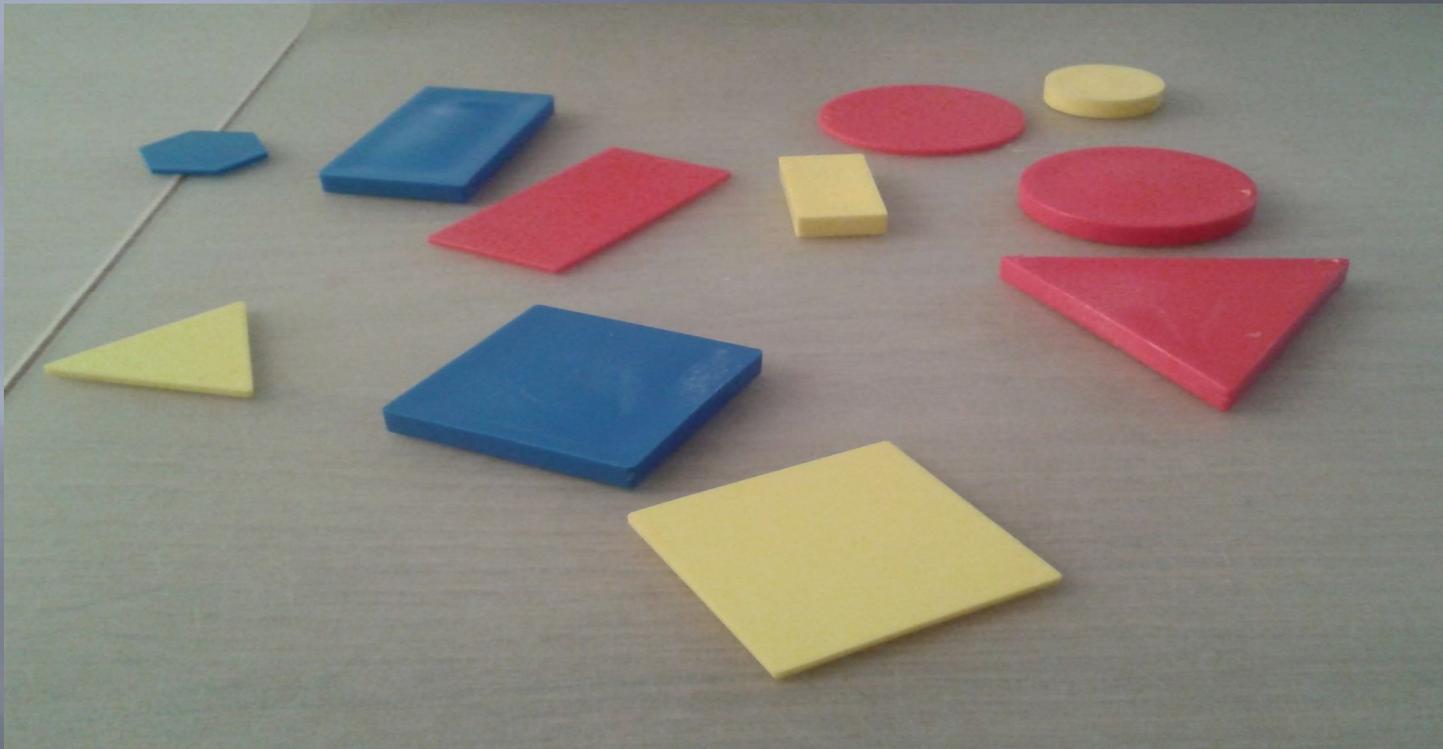
Le stade pré-opératoire

- ▣ Fonction symbolique
- ▣ Mais toujours avec indexation spatiale et temporelle
→ ici et maintenant et la perception dit la vérité
- ▣ Imitation « faire pareil que » et jeux d'imitation
« faire semblant de »
- ▣ Égocentrisme Animisme
- ▣ Pensée magique
- ▣ Vision globale et non analytique
- ▣ Rigidité → renversabilité mais pas réversibilité

Le stade opératoire concret

- ▣ Les opérations mentales : « actions intériorisées ou intériorisables, réversibles et coordonnées en structure totale »
 - De l'action aux opérations
 - De la renversabilité à la réversibilité
 - Les classifications et la sériation
- ▣ Les conservations
 - Des quantités discontinues → le nombre
 - Des quantités continues : la matière, la longueur, les liquides, le poids, la surface, le volume, l'horizontalité des liquides ...l'atomisme

Les classifications



Les opérations mentales les classifications

- ▣ "[Une classe] est une réunion de termes (individus ou sous-classes) considérés comme équivalents indépendamment de leurs différences" (Jean Piaget, La genèse du nombre chez l'enfant).
- ▣ Organisation mentale reposant sur les propriétés des objets considérés.

les classifications

- ▣ La structure multiplicative
 - Des propriétés réunies en critères qui se croisent

- ▣ La structure inclusive
 - des classes qui s'emboîtent
 - L'inclusion simple (début du stade opératoire)
 - L'inclusion hiérarchique (fin du stade opératoire et même après...)

la structure multiplicative

Tri dichotomique (la genèse des structures logiques élémentaires)



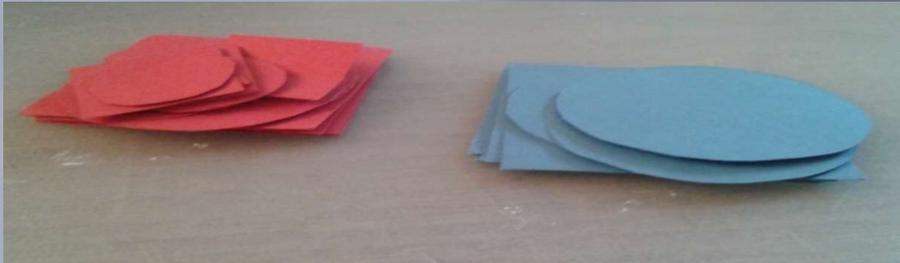
Tri dichotomique comportements préopératoires



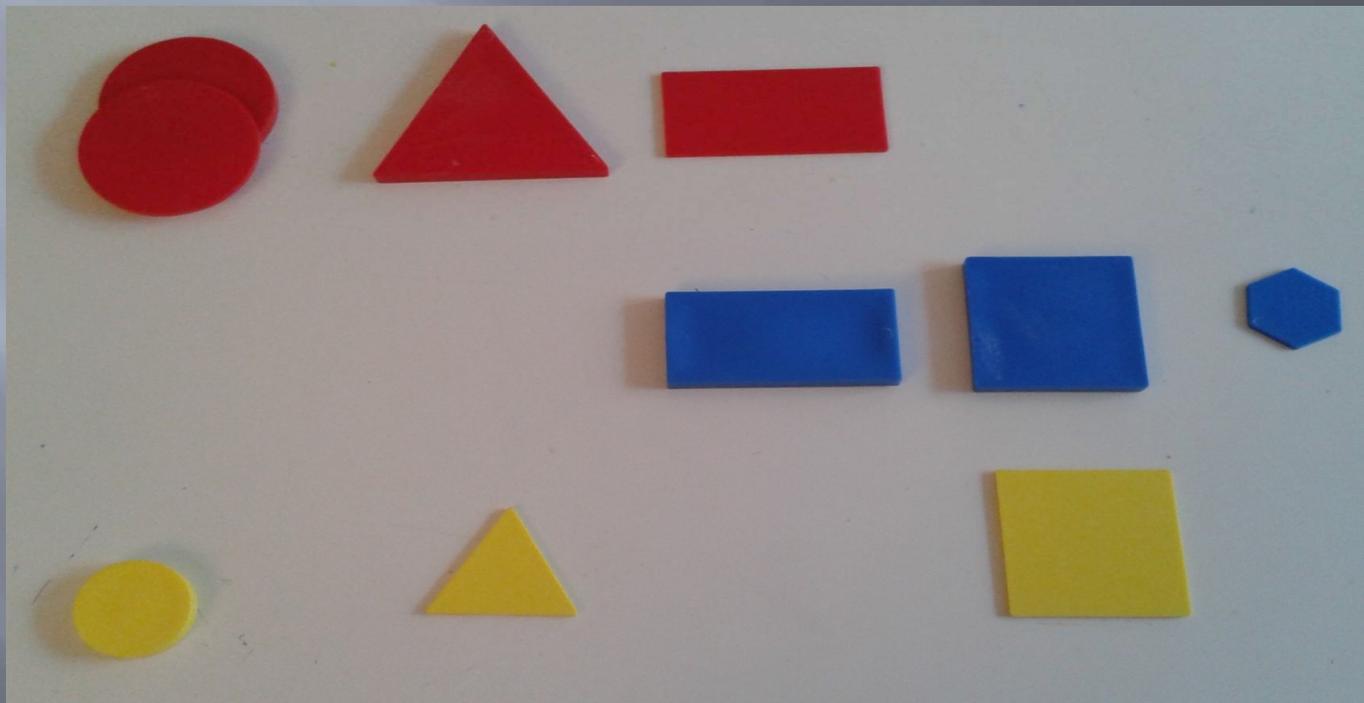
Tri dichotomique comportements intermédiaires



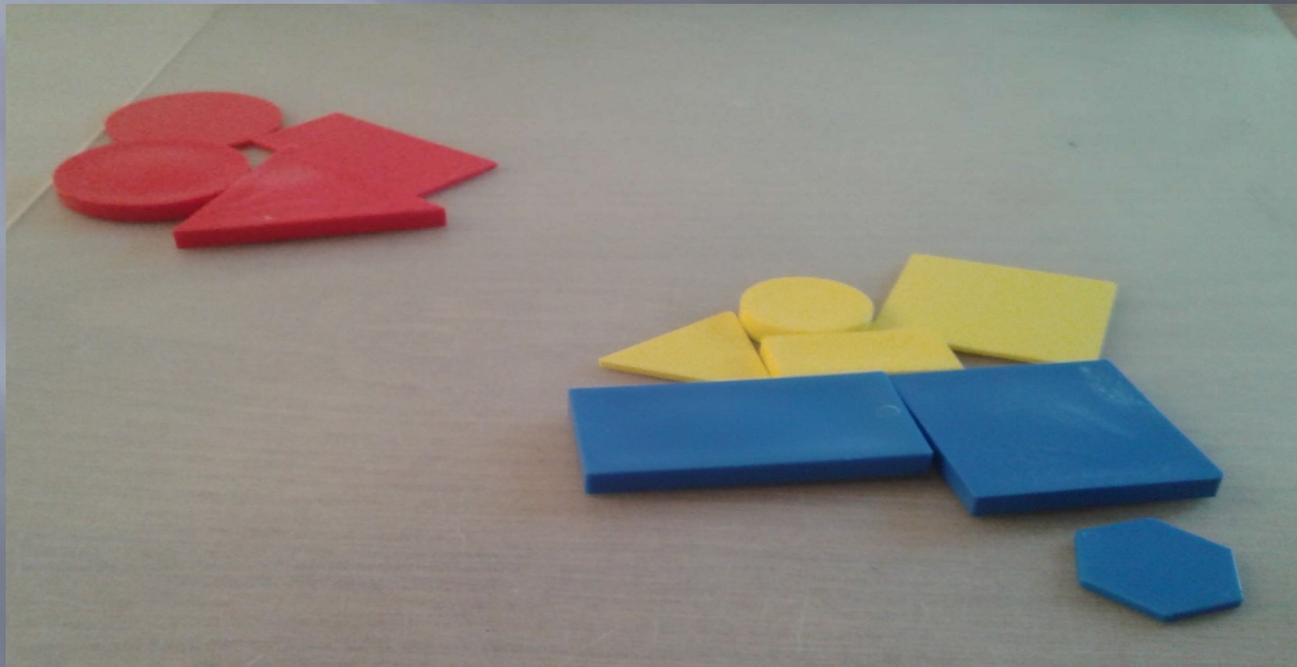
Tri dichotomique comportement opératoire



Blocs logiques comportement opératoire avancé



Un autre la négation



L'inclusion simple Marguerites et fleurs GSLE



La structure inclusive

L'inclusion simple



La structure inclusive l'inclusion hiérarchique

Combien y a-t-il d'animaux dans cette liste?

6 mammifères

5 oiseaux

4 carnivores

3 chiens

3 canards

2 caniches

2 tortues

2 serpents

1 boa

1 requin

Les opérations mentales

la sériation

- ▣ La sériation est l'opération mentale qui permet d'ordonner des éléments selon une grandeur définie.
- ▣ une sériation est une relation
 - > antisymétrique : si $a R b$ alors $b \not R a$
 - > transitive : si $a R b$ et $b R c$ alors $a R c$

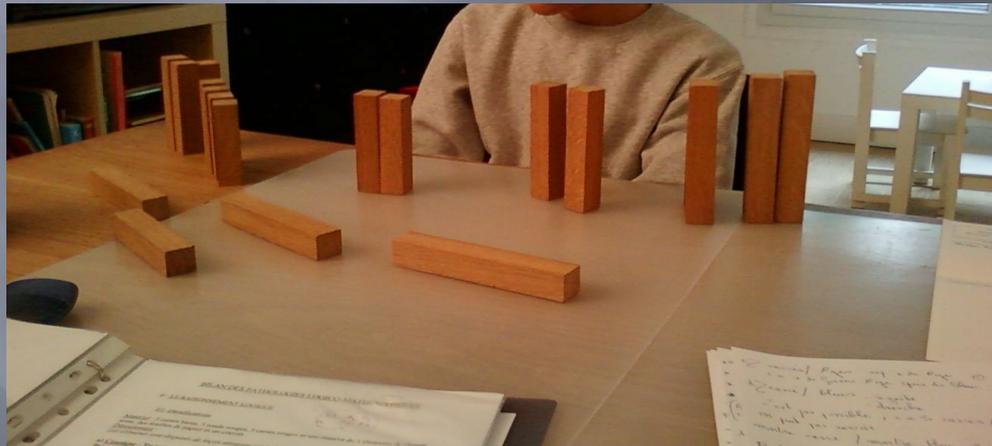
Les bâtonnets de Piaget



La sériation stade 1: préopératoire



La sériation stade 2 : préopératoire



La sériation stade 3 : opératoire



Les conservations

C'est la conservation qui rend possible les opérations mentales

La conservation est une caractéristique attribuée à une certaine réalité (une classe logique par exemple), ou à une propriété d'une certaine réalité (la longueur d'une tige par exemple), celle de ne pas varier en dépit des transformations subies par cette réalité (qui peut être un objet de pensée)(La genèse du nombre chez l'enfant)

Les conservations

- Des quantités discontinues : le nombre
 - Les trois stades des conservations)
- Des quantités continues : la matière, la longueur, le poids, la surface, le volume...l'atomisme
 - la conservation de la substance et les déformations de la boulette d'argile (Le développement des quantités physiques chez l'enfant)

La conservation des quantités discontinues



La conservation de la matière





Le stade formel

- ▣ « Avant l'adolescence , le possible est un cas particulier du réel, après c'est le réel qui devient un cas particulier du possible » Jean Piaget
- ▣ Stade hypothético-déductif : le raisonnement peut partir d'hypothèses pas forcément vraies et enchaîner des déductions pour arriver à un résultat
- ▣ Celui des formules, des lettres pour représenter des nombres, des inconnues sur lesquelles on peut réfléchir....

Le stade formel

- ▣ La combinatoire
 - La logique propositionnelle
- ▣ Le groupe INRC
 - Transformation Identique
 - Transformation inverse ou Négation
 - Transformation Réciproque
 - Transformation inverse de la réciproque ou Corrélative

Ces deux acquis permettent des raisonnements dans tous les sens, à partir d'axiomes pour arriver à des théorèmes, donc sans manipulation réelle.

La logique propositionnelle

Il s'agit de raisonner à partir de propositions (P, Q,...) qu'on peut considérer comme vraies ou fausses, puis dont on va considérer leur co-occurrence et tous les résultats possibles

P	Q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

On obtient alors 16 cas possibles : les 16 connecteurs binaires de la logique

En voici quelques exemples

- Celui de la structure multiplicative, avec par ex : P:être rouge, Q: être carré

P	Q	
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

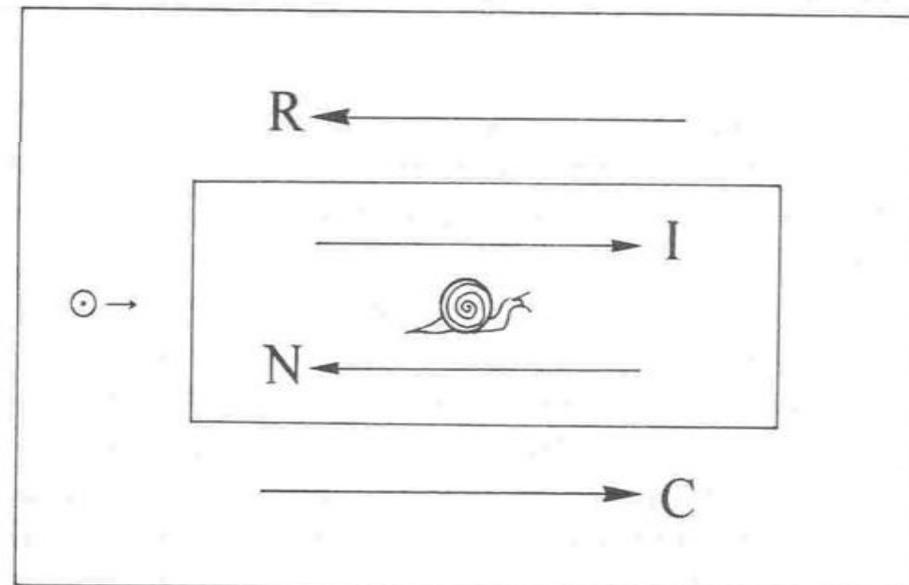
- Celui de l'inclusion avec par exemple P être une pomme, Q: être un fruit

P	Q	
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Groupe INRC

un escargot qui se déplace sur sur une planche mobile

- Définition: coordination de 2 systèmes dont chacun possède une opération directe et une opération inverse et que ces deux systèmes sont en relation de compensation l'un par rapport à l'autre. (I=identique, N=négation, R=réversibilité et C=corrélative).
- Ex: escargot et balance.



En résumé : les 4 étapes des apprentissages

- 1) Découverte de l'environnement et des actions possibles dessus,
- 2) Début des manipulations pour exercer la fonction symbolique mais seulement dans l'ici et maintenant,
- 3) Des opérations mentales mais à partir du concret qui doit toujours précéder le codage,
- 4) Les manipulations concrètes ne sont plus nécessaires, le codage suffit comme support des opérations mentales.

Des critiques pendant et après Piaget

- ❑ Le rôle du langage : cf. Chomsky
- ❑ Sa méthode et le rôle de l'interaction: cf. Bruner
- ❑ Le rôle de la logique et les différences interindividuelles
- ❑ Théories des biais de raisonnements : cf. Evans, Wason
- ❑ Le modèle de Houdé
- ❑ Le modèle de Siegler

Des incompétences tardives ex: le biais de représentativité

➤ Tache de Tverski et Kahneman 1983

« Linda est une jeune femme brillante de 31 ans. Quand elle était étudiante, elle participait volontiers aux manifestations anti-nucléaires.

Selon vous est-il plus probable qu'elle soit devenue aujourd'hui

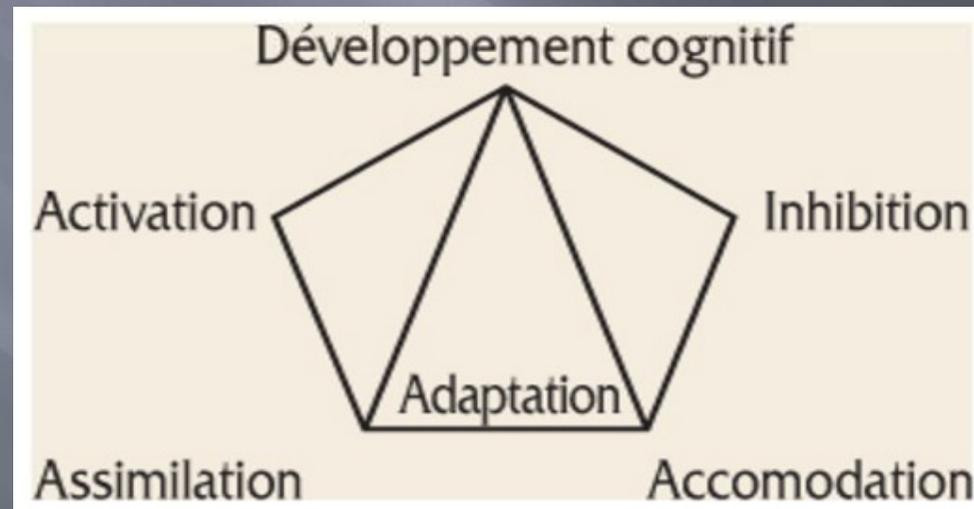
- comptable écologiste

Ou

- comptable ? »

Le modèle de Houdé

- ▣ Rôle prépondérant de l'inhibition cognitive sur le développement



Le modèle de Houdé: 2 modes de fonctionnement

- ▣ Le fonctionnement heuristique
 - rapide , automatisé, peu couteux au niveau cognitif,
 - mais valide seulement dans une grande majorité de circonstances,
 - l'origine des biais de raisonnement
- ▣ Le fonctionnement algorithmique
 - logique organisé, couteux car analyse systématiquement la situation
 - Ne serait déclenché que par une alerte qui inhiberait le fonctionnement heuristique

Le modèle de Siegler

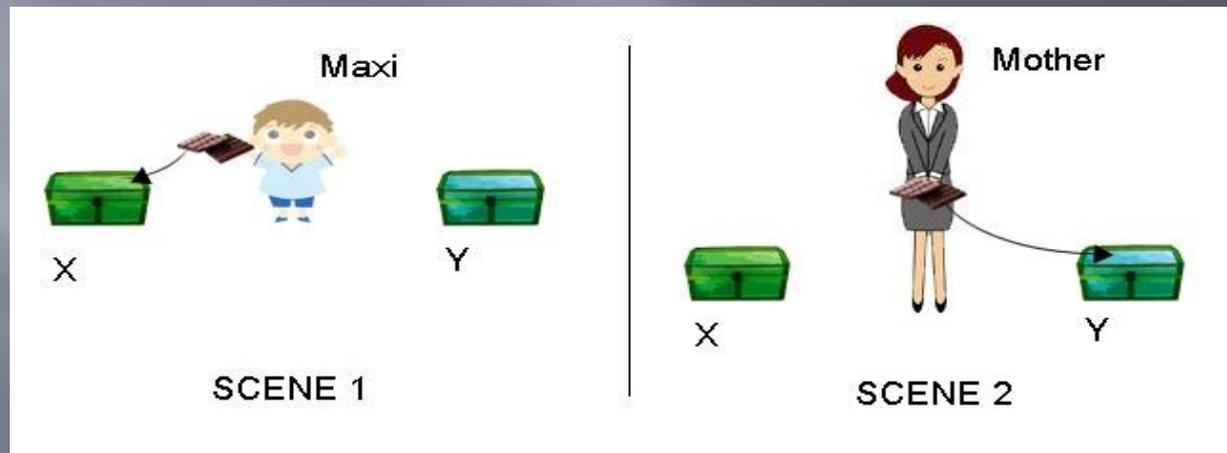
- Des vagues de stratégies qui se chevauchent



Le terme de stratégie se réfère aux comportements mis en place par une personne pour s'aider dans la résolution d'un problème.

La théorie de l'esprit

- Maxi et le chocolat (Perner et Wimmer 1983)



Piaget après piaget

Hatrel 1997 : « comme dans toute œuvre scientifique, il convient de préciser ce qui est périmé de ce qui demeure acquis »

Trois acquis indispensables aux cliniciens

- Les concepts épistémologiques de schèmes, d'invariant cognitif, d'activités assimilatrices et les comportements opératoires de conservation
- La méthode clinique,
- La perspective constructiviste

L'EXEMPLE
DE L'ACQUISITION DU
NOMBRE

Pour commencer...

- ▣ Pour vous qu'est ce que le nombre?

Le nombre

Un **nombre** est un concept permettant d'évaluer et de comparer des quantités ou des rapports de grandeurs, mais aussi d'ordonner des éléments par une numérotation. Souvent écrits à l'aide d'un ou plusieurs chiffres, les **nombres** interagissent par le biais d'opérations qui sont résumées par des règles de calcul.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre>

- une abstraction, une construction de la pensée humaine pour répondre à un besoin
- une composante cardinale
- une composante ordinale
- Les deux sont coordonnées

Notre numération

- ▣ Les 3 principes de notre système numérique
 - La base dix
 - La position
 - L'utilisation du zéro



PARTIE ENTIERE												PARTIE DECIMALE			
Milliard			Millions			Milliers			Unités simples			Dixième	Centième	Millième	
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U				
			1	0	6	4	7	0	9	8	3	0	3	2	

Notre numération orale

- ▣ Un lexique simple : une trentaine de mots pour dire tous les nombres,
- ▣ Une syntaxe simple basée sur la position
 - De gauche à droite en partant de la puissance de 10 la plus grande représentée
 - Organisation en classe de 3 (unité/ dizaine/ centaines)
 - avant → fois ; après → plus

Ex trente deux mille trois cent trente-deux

- Mais un zéro qui n'est jamais dit dans la partie entière et des irrégularités nombreuses

Le nombre

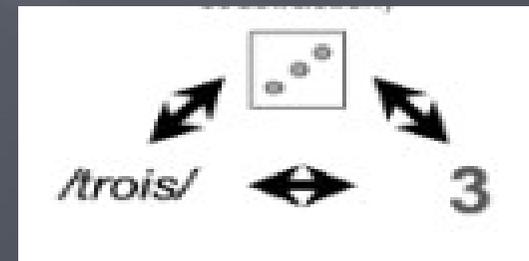
- Un modèle de la neuropsychologie adulte
 - Le modèle du triple code Dehaene et Cohen
 - Complété par le modèle développemental de Von Ester et Shalev
- Les capacités précoces du jeune enfant
- Le nombre dans la théorie piagétienne

modèle neuropsychologique Dehaene et Cohen (1991)

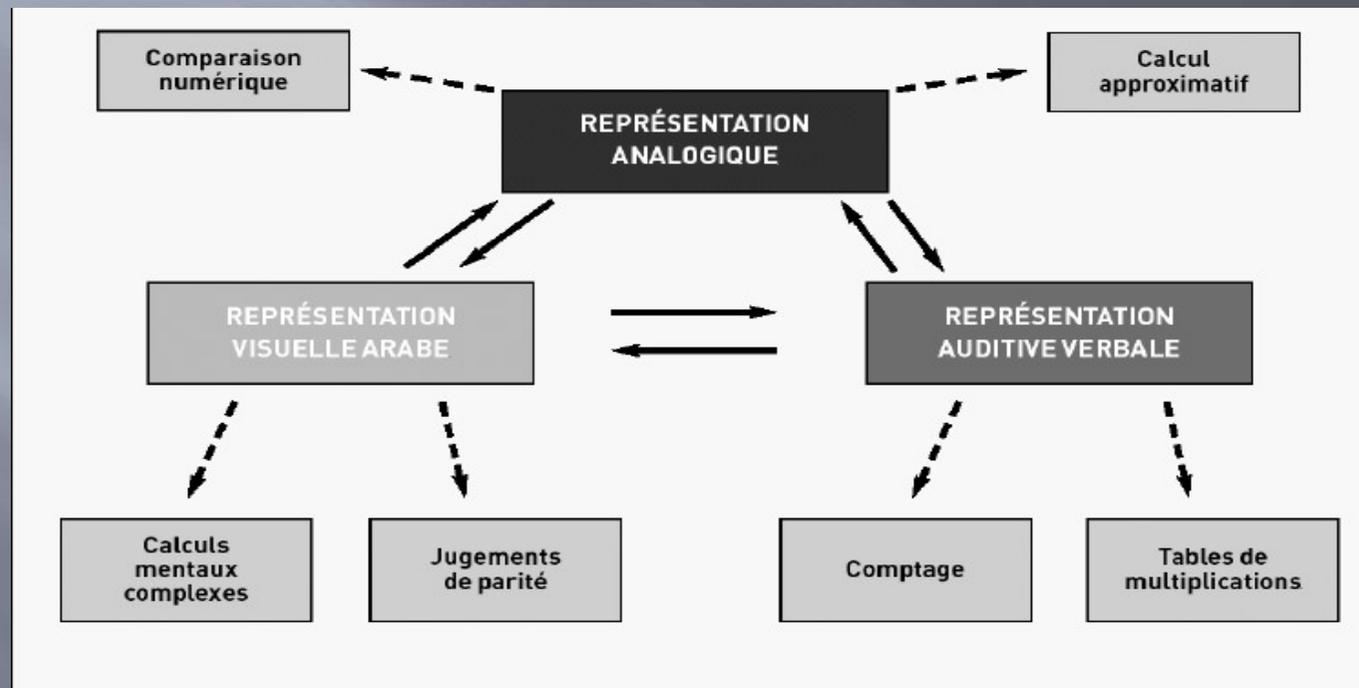
- ▣ Code analogique :
 - comparer ou estimer des quantités sans les nommer
 - ▣ Subitizing
 - ▣ Estimation

- ▣ Code visuel arabe
 - Écrire les nombres grâce à des chiffres

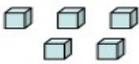
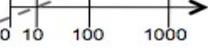
- ▣ Code auditivo-verbal
 - Dire les nombres



Le modèle du triple code



Modèle développemental de l'acquisition numérique Von Aster & Shalev (2007)

	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Mémoire de travail
Représentations cognitives	grandeurs magnitude  Quantités concrètes	Système verbal numérique <i>un/deux/trois/...</i> Mots-nombres	Système numérique arabe ..., 12, 13, 14, ... Chiffres	Ligne numérique mentale  Image spatiale	→
Zones cérébrales	Bi-parietal	Prefrontal G.	Bi-occipital	Bi-parietal	
Habilités	Estimation Comparaison Subitizing	Comptage verbal Récupération des faits	Lecture/écriture Opérations de calcul Jugement de parité	Approximation raisonnement arithmétique	
	Enfance	Age préscolaire	Age scolaire		

Les capacités précoces du jeune enfant

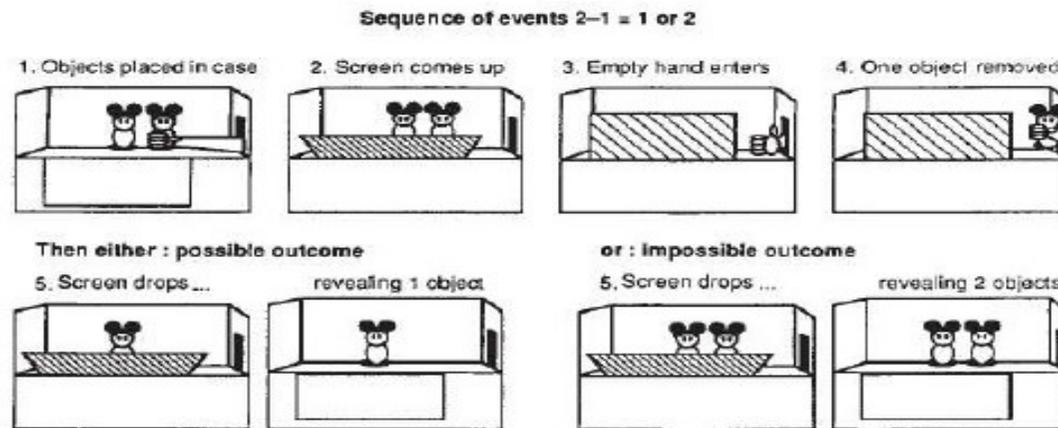
Habiletés proto-numériques : la numérosité
(Gelman et Gallistel 1983/1990)

- ▣ Existence d'une représentation non symbolique chez le bébé (pré-équipement dès la naissance)
 - discrimination valable pour 2 à 3 objets
 - indépendante de la modalité sensorielle

mais incapacité du bébé à sérier les nombres

Les capacités précoces du jeune enfant

Situation expérimentale pour étudier l'addition 1+1 chez des bébés de 5 mois (Wynn, 1992)



Wynn (1992). *Nature*, 358, 749-759.

Les capacités précoces du jeune enfant

Chez les enfants de 3 ans, les cinq principes de Gelman et Gallistel (1978) → le dénombrement

- 1) Le principe d'ordre stable (la comptine numérique)
- 2) Le principe de stricte correspondance terme à terme
- 3) Le principe de cardinal (qui correspond au dernier mot énoncé)
- 4) Le principe d'abstraction (par rapport à ce qu'on compte)
- 5) Le principe de non pertinence de l'ordre (de ce qu'on compte)

LE NOM DES NOMBRES

- ▣ 2 ans 1/2 : compréhension d'une catégorie particulière de mots spécifiques au comptage (Gelman et Gallistel 1978)

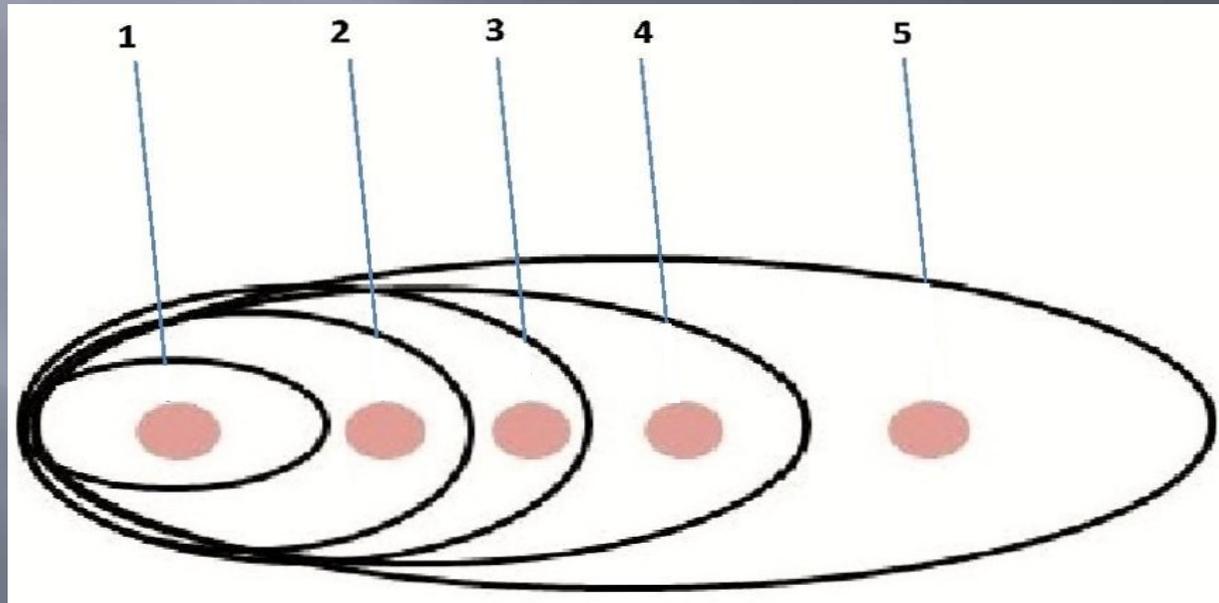
mais incapacité de faire la relation quantité/nom du nombre

- ▣ 3ans : mise en relation quantité/nom du nombre pour 2 (Wynn 1992)
- ▣ 2 à 6 ans : chaîne verbale ou comptine acquise jusqu'à environ 30

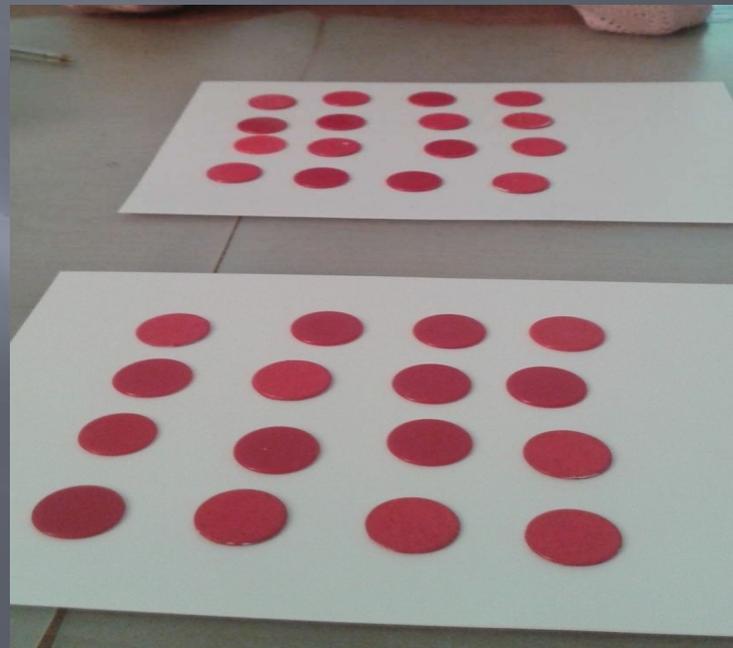
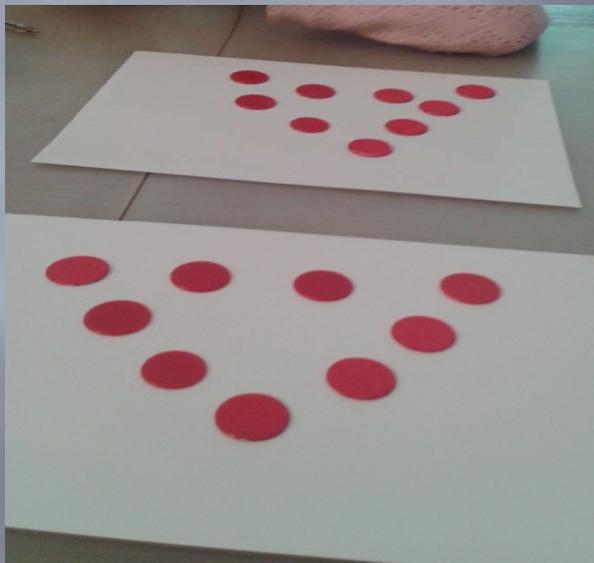
Le nombre selon Piaget

- ▣ Des pré-requis
 - La correspondance terme à terme
 - La capacité de choisir son unité
- ▣ La conservation des quantités discrètes
- ▣ Les structures logiques élémentaires à la base du concept de nombre et de ses composantes
 - Les classes multiplicatives pour la composante cardinale
 - La sériation pour la composante ordinale
 - L'inclusion pour la coordination des 2

Le nombre selon Piaget seulement au stade opératoire



La correspondance terme à terme



Choisir son unité

3 souris / 3 éléphants



Choisir son unité
100 centimes/1 euro



LE NOMBRE,
LES STADES,
LES PROGRAMMES SCOLAIRES

En résumé :

les 4 étapes des apprentissages

- 1) Découverte de l'environnement et des actions possibles dessus,
- 2) Début des manipulations pour exercer la fonction symbolique mais seulement dans l'ici et maintenant,
- 3) Des opérations mentales mais à partir du concret qui doit toujours précéder le codage
- 4) Les manipulations concrètes ne sont plus nécessaires, le codage suffit comme support des opérations mentales

Le nombre au stade préopératoire

A cette période on a besoin des objets concrets pour les compter. On doit les voir et pouvoir les manipuler et seulement en petite quantité.

Au programme de maternelle

- PSM quantités jusqu'à 3
- MSM quantités jusqu'à 5
- GSM quantités jusqu'à 10/12

Mais attention

-à la comptine numérique déconnectée du nombre!

-au objets comptés, enfants, doigts...

Le nombre au stade opératoire

Peu à peu une symbolisation de ce qu'on compte est suffisante mais reste nécessaire on ne peut compter qu' un nombre de...

Au programmes de primaire

- CP : nombres jusqu'à 99
- CE1: nombres jusqu'à 999
- CE2 : nombres jusqu'à 9 999
- CM1 : les grands nombres , la virgule,.....
mais aussi les fractions
- CM2 : aucune notion nouvelle

Le nombre aux stades préformel et formel

→ Le collège et le lycée !

C'est seulement à ce niveau que les adolescents peuvent fonctionner avec

- des lettres pour représenter des nombres,
- des inconnues sur lesquels on peut réfléchir à l'intérieur d'équations
- des formules

En conclusion

Les théories récentes nous donnent des repères très précis sur les compétences attendues en fonctions des âges

→ que faire ?

Les théories logico-mathématiques donnent des modèles de fonctionnement à différents moments et la façon dont ils s'enchaînent

→ comment faire?

en lien avec

→ quand faire?

**Merci
pour votre attention**

Je réponds à vos questions

Quelques éléments bibliographiques

- ▣ Bacquet, M., & Gueritte-Hess, B. (2009). *Le nombre et la numération Pratique de rééducation*. Paris: Editions du Papyrus.
- ▣ Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les Maths*. Paris: Retz.
- ▣ Dehaene, S. (2010). *La bosse des Maths Quinze ans après*. Paris: Odile Jacob.
- ▣ Dolle, J. M. (2005). *Pour comprendre Jean Piaget*. Paris: Dunod.
- ▣ Fayol, M. (2012). *Que sais-je? L'acquisition du nombre*. Paris: PUF.
- ▣ Gueritte-Hess, B. , Causse-Merghi, I. & Romier Mc. (2005). *Les maths à toutes les sauces*. Paris: Editions Le Pommier.
- ▣ Gueritte-Hess, B. (2009). *Au fait, c'est quoi pour vous la virgule en mathématiques?* Paris: Editions du Papyrus.
- ▣ Houdé, O. (2004). *Que sais-je? La psychologie de l'enfant*. Paris: puf.
- ▣ Piaget, J., & Inhelder, B. (1959). *La genèse des structures logiques élémentaires*. Lausanne: Delachaux et Niestlé.
- ▣ Piaget, J., & Inhelder, B. (1941). *Le développement des quantités physiques chez l'enfant*. Paris: Delachaux et Niestle.
- ▣ Piaget, J., & Szeminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Paris: Delachaux et Niestle,